

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Una de las herramientas en las matemáticas financieras que nos permitirá estudiar las principales aplicaciones al cálculo del interés simple son las progresiones aritméticas y geométricas.

Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión de números (llamados términos), de tal forma que cada uno de ellos, después del primero, se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada diferencia de la progresión o diferencia común.

Cuando la diferencia de la progresión es positiva, se dice que se trata de una progresión creciente, y cuando la diferencia es negativa entonces se trata de una progresión decreciente.

Al primer término de la progresión aritmética se le representa con la letra **a**, en tanto la diferencia común con la letra **d** al número de términos de la progresión lo representamos con la letra **n** y al último término de la progresión con la letra **l**.

Ejemplo:

1.- Dada la progresión 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 tenemos que:

$$d = 4 - 1 = 3, \quad 7 - 4 = 3, \quad 10 - 7 = 3, \quad 13 - 10 = 3$$

Es una progresión creciente, dado que la diferencia es positiva **d=3**

- El primer término es **$a_1 = 1$**
- L número de términos que la forma **$n = 8$**
- El último término es **$a_8 = 22$**

Considerando que en una progresión aritmética cada término es igual al anterior más la diferencia común, podemos decir lo siguiente:

- El primer término es **a**, donde **n=1**
- El segundo término es **a+d**, donde **n= 2**
- El tercer término es **a+d+d= a+2d**, donde **n=3**
- El cuarto término es **a+d+2d=a+3d**, donde **n=4**

Término desconocido

Como se puede observar, el coeficiente de d corresponden al valor de $n-1$, por lo que podemos deducir que el valor del n -ésimo término de una progresión aritmética está dado por la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

(Fórmula para encontrar el término desconocido)

Ejemplo

Encontrar el 8^o término de la progresión 10,14,18.....

Solución:

$$d = 14 - 10 = 4; \quad 18 - 14 = 4 \text{ diferencia común de los términos}$$

$$a_1 = 10 \text{ por que es el primer término de la serie}$$

$$n = 8 \text{ por tratarse del } 8^{\text{o}}\text{-término}$$

$$a_8 = a + (n - 1)d, \text{ entonces}$$

$$a_8 = 10 + (8-1)4$$

$$a_8 = 10 + 7(4)$$

$$a_8 = 10 + 28 \text{ por lo tanto } a_8 = 38$$

Si conocemos el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión.

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

Ejemplo

Encontrar los primeros dos términos de la progresión si $a_4 = -7$ y $d = -5$

$$a_n = -7 + (n - 4) \cdot (-5)$$

$$a_n = -7 - 5n + 20$$

$$a_n = -5n + 13$$

$$a_1 = -5(1) + 13 \text{ por lo tanto } a_1 = 8$$

$$a_2 = -5(2) + 13 \text{ por lo tanto } a_2 = 3$$

Suma de los n términos

La suma de los n términos de una progresión aritmética se representa con la letra S, la cual se obtiene sumando todos los términos de la progresión:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ (Fórmula para encontrar la sumatoria de n términos)}$$

Ejemplo

Encontrar la suma de los primeros 14 términos de la progresión 4, 1, -2

Solución: Primero encontramos el 14^o término de la progresión

$$d = 1 - 4 = -3, \quad -2 - 1 = -3 \text{ (diferencia común es -3 de la serie)}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{14} = 4 + (14 - 1)(-3)$$

$$a_{14} = 4 + 13(-3)$$

$$a_{14} = 4 - 39 = -35$$

Una vez encontrado el 14^o término y los valores de a, n, d, y l se calcula la suma de los 14 primeros términos, se calcula la sumatoria de los mismos:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S = \frac{14(4 - 35)}{2} = -217$$